



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences

硕士学位论文

双星观测量计算方法的改进及应用

作者姓名: 陈健

指导教师: 夏芳 副研究员 中国科学院紫金山天文台

傅燕宁 研究员 中国科学院紫金山天文台

学位类别: 理学硕士

学科专业: 天体测量与天体力学

培养单位: 中国科学院紫金山天文台

2018年6月

An Exact Algorithm in
Computations of Binary Stars' Observed Quantities
and Its Application

A thesis submitted to the
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Master of Natural Science
in Astrometry and Celestial Mechanics

By

Chen Jian

Supervisor: Co-professor Xia Fang and Professor Fu Yan-ning

Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences

June, 2018

中国科学院大学 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日 期：

中国科学院大学 学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权保留送交学位论文的副本，允许该论文被查阅，可以按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：

日 期：

导师签名：

日 期：

摘 要

观测研究表明约一半的恒星是双星系统的子星。但由于观测时段等的限制,其中已得到(部分)轨道参数的双星不超过 7000 个。最近更新的华盛顿双星星表已经收录了 142645 个双星系统的 1619023 个相对位置测量数据,这使得双星轨道拟合工作发展迅速,其给出的大批量的系统亮子星的位置,丰富了亮星星表参考架的内容。同时,双星轨道拟合给出的恒星动力学质量参数是恒星系统动力学研究和恒星演化研究必不可少的参量,也为恒星经验质光关系的研究提供了更多精确的参考样本。

本论文指出,关于双星轨道拟合工作的此前研究普遍采用了一些近似,如切平面的变化与空间的透视效应均被忽略。对上百个含亮子星的双星系统而言,这些近似引起观测量计算的偏差已经超过了当前的观测误差(1 毫角秒)。因此,以牛顿二体模型为基础,本论文用严格的立体几何关系推导出观测量,建立了一种严格的观测量计算方法,然后在轨道拟合及观测量计算方面同近似的观测量计算方法作对比,以体现两者差异的显著性。考虑实际双星系统观测数据的覆盖率和精度,在改进程度最大的双星系统中选出半人马座 α 进行轨道拟合。仿真实验的结果表明依靠严格的观测量计算方法拟合出的参数具有更高的置信水平。采用近似的观测量计算方法拟合出的参数,会导致预报的双星相对位置偏差达到 15 毫角秒,视向速度的偏差则能达到 12 米每秒,都远超过了当前这两种观测数据的观测误差。这说明原有的近似方法已经不适用于高精度轨道拟合了。在观测数据精度逐步提高的情况下,将有更多双星系统尤其是太阳系邻近的远距双星需要采用改进后的观测量模型。

关键词: 双星, 轨道拟合, 天体力学

Abstract

It has been proved by the observation that half of stars are components of binaries. But the orbits known is no more than 7000 for sake of the observational time span. The WDS Catalog contains 142645 binaries and 1619023 entries of the observed relative position. Orbit fitting can provide orbital parameters of component stars, which could improve the density of reference stars in Bright Star Catalogue Reference Frame. At the same time, it is the only reliable way of determining stellar masses, a crucial parameter for stellar system dynamics and evolution studies, provide more samples for the research of light-mass relations.

Here we find that the previous studies on the determination of the orbital parameters of binaries adopted approximations in computing the observations. The change of the plane of sky and the prospective effect of the reference plane has been neglected. According to the statistical results of hundreds of binaries with bright components, it could be found that the approximations make the computed observational deviation larger than the present observational precision (1 milli arcsecond). In this thesis, an exact algorithm based on the two-body model for computing observables with complete geometry is presented. Among the binaries, we selected α Centauri for the fitting because this binary system has more observational data than others. And the fitting results show that the fitted parameters by the exact algorithm usually have higher confidence. The deviation of the approximate algorithm may arise errors in position prediction for about 15 milli arcseconds in relative position and 12 m/s in radial velocity, while exceed the present observational error. Therefore, the approximate algorithm is not capable for the high precision orbit fitting. As the precision of observational data enhanced, more and more binaries, especially these wide binaries near the solar system, need to be redetermined by the exact algorithm of observables' computation.

Keywords: binary, orbit fitting, celestial mechanics

目 录

第 1 章 双星运动学研究概述	1
1.1 双星研究的发展过程	1
1.2 双星轨道拟合	3
1.3 双星观测量模型中的近似	5
第 2 章 观测量计算方法	9
2.1 理论基础	9
2.2 参数定义	13
2.3 严格的位置计算	14
2.3.1 从模型参数到运动状态	15
2.3.2 观测量的计算	18
2.4 模型参数的拟合	19
2.5 总结	20
第 3 章 严格观测量计算方法的应用	23
3.1 统计双星的改进程度	23
3.2 轨道拟合	27
3.3 拟合结果的分析	29
第 4 章 结论与展望	33
4.1 结论	33
4.2 本工作的进一步发展	33
参考文献	35
作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果	37
致谢	39

图形列表

1.1	视椭圆	4
1.2	Kaplan 指出的切平面转动问题	6
1.3	Kaplan 指出的三维透视问题	6
1.4	Kaplan 指出的光行差较差问题	7
2.1	相对运动平面	10
2.2	二体轨道平面图	12
2.3	变量关系图	16
2.4	θ 在天球上的示意图。	19
2.5	透视效应影响双星投影位置。	21
3.1	改进程度直方图	24
3.2	半人马座 α 的相对位置拟合结果	28
3.3	严格的观测量计算方法与近似的观测量计算方法拟合仿真数据所得参数值与真值的偏差。	30
3.4	半人马座 α 的 4 种观测量的偏差随时间的演化图。	31

表格列表

3.1	改进程度较大的几个双星系统	26
3.2	半人马座 α 双星的参数解及其准确性	29

符号列表

字符

Symbol	Description	Unit
G	gravitational constant	$6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
M	mean anomaly	rad
f	true anomaly	rad
E	eccentric anomaly	rad
Ω	longitude of ascending node	°
ω	argument of pericentre	°
i	orbital inclination	°
e	eccentricity	
a	semi-major axis	arcsecond
τ	time of pericentre passage	year
P	period	year
\mathbf{r}	position vector	
r	scalar of \mathbf{r}	
\mathbf{e}_r	unit vector in the direction of increasing r	
\mathbf{e}_θ	unit vector in the direction of increasing θ	

算子

Symbol	Description
Δ	difference
$\dot{\mathbf{r}}$	derivative of \mathbf{r} with respect to time

缩写

BVLS	Bounded Variable Least Square algorithm
ESA	Europe Space Agency
IAU	International Astronomical Union

ICRS	International Celestial Reference System
VB6	Sixth Catalog of Visual Binary Stars
WDS	The Washington Double Star Catalogue

第 1 章 双星运动学研究概述

“双星”目前通常指两颗恒星在引力的作用下互相绕转形成的长期稳定的天体系统^[1]，也称“双星系统”，其中的两颗恒星都可以称为“子星”，质量较大的或较亮的一般称为“主星”，另一颗称为“伴星”。据估计有一半的恒星都是双星系统的成员^[2]。双星的运动能在一定程度上反映自身的性质，双星的轨道形状和双星各自的质量。这些性质对双星的物理研究非常重要。同时双星运动学研究对于建立高精度星表参考架是有帮助的。

1.1 双星研究的发展过程

早期的天文学研究中只是将一些肉眼看上去靠得很近的恒星称为“双星”。公元 2 世纪时托勒密的星表中称人马座 ν_1 和 ν_2 为双星，这两颗星相距 14 角分且实际上没有物理联系^[1]。真正发现有内在关联的双星是在望远镜发明并应用于天文观测之后。1650 年，意大利天文学家里乔利发现大熊座 ζ （开阳，北斗六，Mizar）是双星^[1]。17 世纪时，虽然望远镜还不够成熟，但也发现了一些双星系统，其中有南天非常亮的半人马座 α （南门二）和南十字座 α ，在后来的几十年中双子座 α （北河二）、室女座 γ （东上相）等也被发现是双星^[1]。这个阶段发现的双星基本都是能在望远镜中分辨开的，称为“目视双星”（Visual Binary, VB）。

18 世纪时，因为测算天体距离存在困难，无法确定天球面上成对的双星是否确实在空间上相邻。而在 1767 年，约翰·米歇尔推测这些双星是有物理联系的，他注意到恒星在天球上成对出现的概率高于恒星在空间随机分布假设下的应有几率，并由此认为必然存在大量的双星^[3]。1781 年天文学家迈耶制作了第一张双星星表，共有 80 条目。与此同时，威廉·赫歇尔打算用这些双星来定视差。他对于双星的物理联系持怀疑态度，认为这些星应该在视线方向上相距很远，从而会因周年运动而产生相对位置的变化。他确实在观测数据中发现了双星中的位置变化，尤其是双子座 α 。但进一步分析后，他认为这些运动应该归结于恒星间互相绕转的轨道运动。1802 年，威廉·赫歇尔第一次使用了“双恒星系统”（binary sidereal system）的说法。他的工作也支持了米歇尔的推测。一般认为赫歇尔的发现是牛顿经典力学适用于太阳系以外的天体的最早的证据^[3]。

1783 年 Goodricke 在对英仙座 β （大陵五，Algol）的光变特性重新解读后，发现它可能是双星^[1]，但与目视双星不同，它的两颗星存在交掩互食现象，这种

双星称为“食双星”(Eclipsing Binary 或 Photometric Binary)。食双星与真正的光变恒星表现得很相似, 1889年 H. C. Vogel 通过光谱确认了英仙座 β 为食双星^[1]而非变星。到 20 世纪, 食双星与真正变星的区分才普遍展开。

1827 年, F. Savary 通过拟合研究得到了大熊座 ζ (开阳) 的轨道^[4], 这是第一个有实际双恒星系统背景的牛顿二体轨道解^[3]。照相术的发明为天文观测提供了更好的分析与保存数据的方法。1837 年出现了第一张双星的照片——由 Bond 拍摄的大熊座 ζ (开阳)。1844 年, F. W. 贝塞尔发现天狼星与小犬座 α (南河三) 的自行呈现出明显的波浪形, 推测它们实际上各自与另一颗看不见的伴星组成双星系统, 并对这两个系统都给出了子星在系统中心附近的运动。这类双星被称为“天体测量双星”(Astrometric Binary), 但随着对暗星观测能力的提高, 天体测量双星与目视双星的区别被弱化, 现常被统称为目视双星。天狼星的伴星于 1862 年被发现。南河三的伴星更暗一些, 且更靠近主星, 直到 1896 年才被发现^[1]。19 世纪, 随着多普勒效应的发现, 双星光谱研究也渐渐起步。1868 年, W. Huggins 第一个尝试用光谱来研究恒星的视向速度。1889 年, E. C. Pickering 发现了大熊座 ζ (开阳) 的光谱中有时会出现双谱线, 他把这个现象解释为双星轨道运动导致的不同方向的多普勒频移^[1]。这里观测到的有分光特性的双星系统并不是前面介绍的大熊座 ζ (开阳) 目视双星系统, 而是其内部的一个子系统。目前发现开阳有 7 个或更多子星, 类似的多星系统有很多, 但多数可以作为分等级的二体系统来研究。有光谱的双星并不都像开阳一样会出现两个谱线, 它们往往只有一个可见的子星, 所以谱线只有一条, 它们的运动通过不同观测时刻的谱线的位移反映出来。这种通过光谱反映的视向速度变化确认的双星称为“分光双星”(Spectroscopic Binary)。之前提到 H. C. Vogel 在 1889 年通过光谱确认英仙座 β (大陵五) 为双星, 除此之外他还用光谱分析的结果建立了这个双星系统的轨道运动模型, 与掩食周期符合得很好。1891 年 Rambaut 利用光谱资料给出了御夫座 β (五车三) 的轨道^[4]。

20 世纪以来, 基础科学理论的进步与天文观测技术的提高使双星研究快速发展。限制性三体理论与相对论、黑洞等引起轰动, 对双星多星的运动及物理性质研究提供了理论基础。恒星的形成与演化方面的理论也与双星密切相关, 密近双星、射电脉冲双星等成为恒星物理研究的重要内容。光学望远镜分辨率随着制作工艺的发展而大大提高, 使更多暗弱的相互靠近的双星被分辨出来。在测量方法上也从开始的目视到测微线再到干涉测量和照相测量。计算机的问世使双星的轨道计算和观测资料整理更加方便。70 年代已经有 15000 颗目视双星被发现。

测定出的双星轨道有 50 个^[1]。1984 年建立的华盛顿双星星表 (The Washington Double Star Catalog, WDS), 是目前世界上关于双星系统的主要天体测量数据库^[4]。到今天已经收录了 142645 个双星系统的 1619023 个相对位置测量数据¹。视向速度的测定精度也在提高, 发现的分光双星也越来越多。Batten 等人于 1989 年发布了第八分光双星轨道星表^[5], 共给出了 1406 对分光双星的观测数据及研究信息。由于观测资料不断增加, 2000 年 IAU 指定一个工作组专门负责更新该星表。2004 年, 在第八分光双星轨道星表的基础上, Pourbaix 等人^[6]发布了第九分光双星轨道星表, 并不断更新。

对食双星来说最重要的观测量就是光度, 光电效应的发现促进了光度测量的技术方法改进。20 世纪中期光电倍增管的出现使得观察任意星等的恒星成为可能。此后, 观察 10 到 12 等星可以不必借助大型望远镜。近几十年里出现了量子效率和时间分辨率更高的电耦合器件 (CCD), 不仅在光度测量上更具优势, 在图像处理与保存方面也更方便, 逐渐替代了传统的测量方法。目前, 对于一部分双星来说, 根据观测方法不同产生的目视双星、分光双星与食双星的分类的界限已经不那么明显了, 联合多种观测资料拟合出的双星轨道比以往更为精确。在天文观测技术方面, 近几十年来发展起来的人造卫星空间观测具有得天独厚的优势, 它可以避开地球大气层, 使天体位置测量的精度提高到前所未有的水平。1989 年发射的依巴谷天体测量卫星提供了大量高精度的双星位置资料^[7], 2013 年发射的 Gaia 卫星将提供更大量的暗弱的双星观测资料, 对于亮于 15 等的星其精度为 7 到 20 微角秒^[8]。空间观测还可以突破大气层对电磁波频率的限制。在 X-射线空间望远镜的帮助下, 双星与黑洞理论之间的联系被建立起来^[1]。

与所有科学研究一样, 双星的研究是一个从现象到本质的过程。起初人们用肉眼只能看到单个亮星, 后来借助望远镜发现有些其实是由两颗构成的双星, 再后来关注双星内在的运动, 接着探寻这种运动形成的原因。每一次深入都依赖于技术的进步和理论的创新。随着今天科学技术的突飞猛进, 双星的研究一定会取得更大突破。

1.2 双星轨道拟合

双星轨道的确定从双星发现开始便是重要的研究内容。一切对双星物理性质的更深层次研究都依赖于精确的双星轨道参数, 尤其是双星的质量参数。严格地说, 恒星质量只能通过双星系统的运动才能精确地测定。

¹<http://ad.usno.navy.mil/wds/wds.html>

早期观测数据较少的时代，双星的轨道主要通过几何计算得出。虽然我们看到的双星在天球上的相对运动轨道并不是真实的双星轨道，但它近似作为真实轨道的投影，在一定程度上反映真实轨道的性质。按照二体理论，双星的运动轨道是椭圆。那么轨道的投影也一定是个椭圆，但轨道的焦点的投影不一定在投影椭圆的焦点上，正因如此，可以根据投影轨道加上焦点确定出真实轨道的信息^[1]。图1.1^[1]即为视椭圆，其中 Π 为近心点的投影， A 为远心点的投影， M 为视椭圆中心， F 为虚焦点， LQ 平行于近心点 Π 处的切线，角 σ 对应的真实轨道中的角是 90° 。只要观测资料能提供超过3个视椭圆上的点的信息，就能得到视椭圆的形状，据此将真实轨道锁定为两种镜面对称的情况。

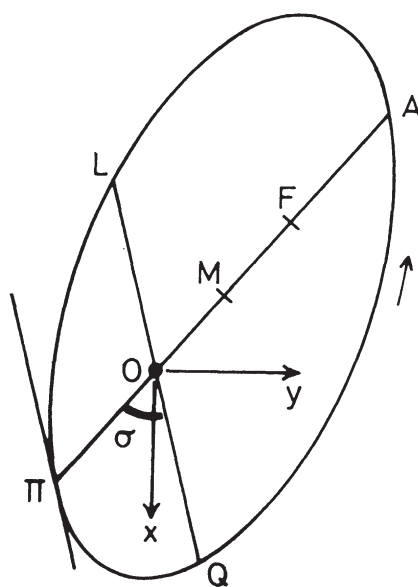


图 1.1 视椭圆

Figure 1.1 The apparent ellipse

在观测数积累得较多以后，轨道拟合成为双星轨道求解的更合适的方法，计算机的出现使轨道拟合方法更加准确方便。拟合轨道与直接计算轨道的思路刚好相反。直接计算轨道是由观测量求轨道，而拟合是先给一个粗略的轨道计算出观测量理论值，然后跟观测数据对比，决定如何调整轨道以使理论值更接近观测值。在传统方法中，依靠相对位置能确定有关双星轨道的7个独立参数，它们可以精确描述轨道的指向与形状，但最终只能将轨道限制为两种镜面对称的情况，要确定属于哪种情况必须借助视向速度数据。同时，由这些轨道参数可以求出二者质量之和，但如果没有质心位置的资料，是无法求出精确的质量比的，也就无法求出子星的质量。双星的视向速度观测资料能反映一部分轨道性质。如果双星的两个子星都有视向速度资料，那就可以确定双星的质量比，但仅凭视向速度无

法确定质量之和。所以要精确求出双星的子星质量就必须同时拥有相对位置观测资料和视向速度观测资料。虽然这种求质量的方法对观测资料要求高，但却是唯一精确的求双星质量的方法。

得到精确的双星质量之后就可以用于检验恒星质量与光度的关系^[9,10]，有利于确定更精确的恒星演化模型。一直以来，高精度的亮星星表参考架中没有收录双星，因为它们有自身的轨道运动，在天球上的运动不是线性运动。但目前随着观测设备分辨率的提高，越来越多的双星被发现，亮星中有很多都是双星，将它们都排除在星表定位星之外虽然可以回避双星位置不确定带来的问题，但是也降低了星表的参考星密度，从而降低了参考架的精度。

双星的运动较单星来看确实复杂一些，由于双星中的两颗恒星质量很大，受周围天体影响相对较小，所以远没有太阳系的行星运动复杂，总体上说就是把质心的匀速直线运动加上了二体运动。二体运动是完全可解的。只要二体轨道准确无误，可以计算出任一时间双星的位置。

采用双星作为参考星，就必须在星表中加入双星的完整二体运动参数，这些参数必须非常精确以满足高精度定位的需求。

1.3 双星观测量模型中的近似

描述双星运动的二体运动学模型具有足够的完备性，但观测资料常有系统误差，不能反映出真正的双星运动。在双星的相对位置资料中有两个分量，一个是双星之间的角距离 ρ ，一个是双星之间连线的方位角 θ ，从正北方向起量沿北、东、南、西计量。一般来说 ρ 比较容易测准，但 θ 的测量就依赖于参考架的精度，不易测准。对 θ 影响较大的是地球的岁差，它会引起局部位置上正北方向的偏移^[11]，这个问题已被普遍考虑。然而除此之外，双星拟合工作中采用的很多近似仍会引起不小的系统误差。J. Halbwachs^[12] 与 G. Kaplan^[13] 注意到这些近似并估计了产生的系统误差的大小。

以 Kaplan 在 IAU2015 大会上提出的观点为例说明相对位置计算中近似引起的问题。首先，双星轨道的空间指向由切平面给出，切平面在精度较低时可以粗略地定义为垂直于某颗子恒星的视线方向，但我们知道，这个视线方向由于受到恒星自行的影响不断发生变化。图1.2是 Kaplan 为解释这种问题所绘制的^[13]，这里将原图中的英文翻译成了中文，可以看出，Kaplan 估计这种偏差在恒星距离为 100 角秒，相对切平面夹角为 45° 时，产生的偏差为 6.9 毫角秒。因此，在高精度恒星定位研究中需要给切平面一个精确的定义或者采用其它更精确的方法

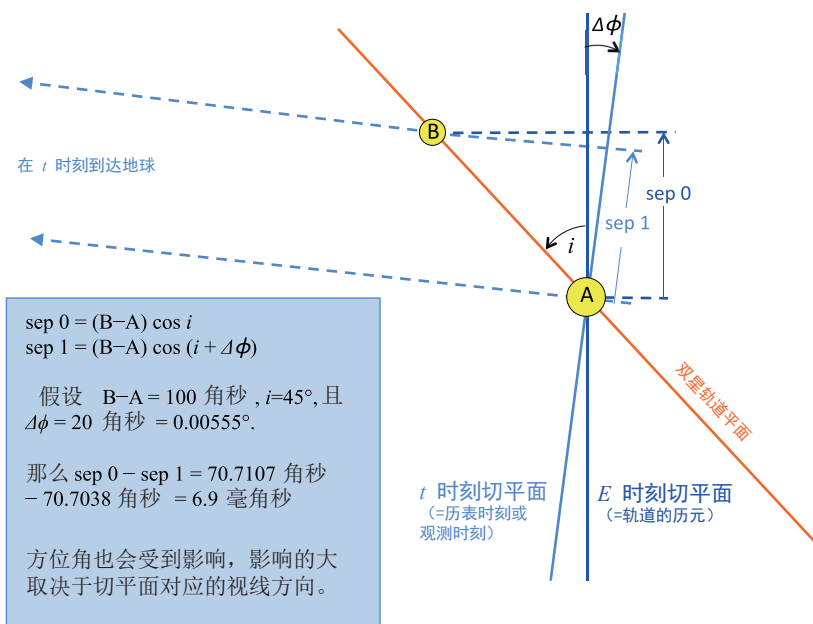


图 1.2 Kaplan 指出的切平面转动问题

Figure 1.2 Rotation of the plane of sky mentioned by Kaplan

描述双星轨道空间指向。

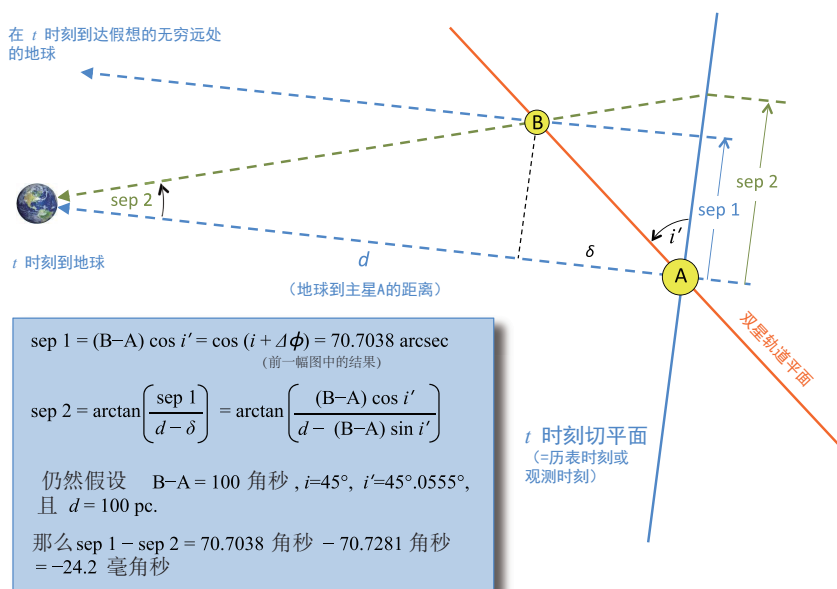


图 1.3 Kaplan 指出的三维透视问题

Figure 1.3 3-D perspective effect mentioned by Kaplan

其次, 由于空间透视效应的存在, 轨道运动在切平面上的平行投影并不是我们真正看到的图象, 而是假想的从无穷远处观测双星所看到的图象。图1.3是

Kaplan 为解释这种问题而绘制的^[13]，原图中的英文已翻译成了中文，可以从中看出，在之前假设的条件下，这个因素导致的偏差大约为 24 毫角秒。

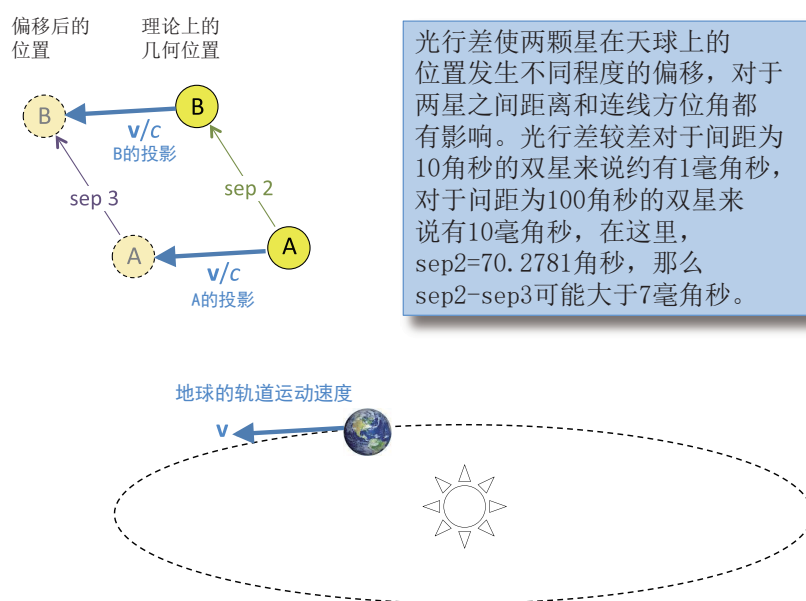


图 1.4 Kaplan 指出的光行差较差问题

Figure 1.4 Differential aberration mentioned by Kaplan

最后，光行差对两个子星分别的影响会导致相对位置产生偏差，图 1.4 是 Kaplan 为解释这种问题而绘制的^[13]，原图中的英文已翻译成了中文。图 1.4 中显示，光行差较差在一般情况下为双星间距离的万分之一，对于图 1.2 中假设的条件，这个原因产生的偏差约为 7 毫角秒。

早期因为相对位置测量误差普遍大于 0.1 角秒，所以近似的问题一直没有引起重视。而目前地面的干涉观测仪器的精度已经达到或好于 1 毫角秒^[4]，为避免近似带来的误差，需要从基本的二体运动模型出发，严格地依照几何关系计算出双星的观测量。

下面第 2 章对改进后的严格的双星观测量计算方法作具体介绍。第 3 章是改进后的严格计算方法在实际双星系统位置计算及轨道拟合中的应用。第 4 章总结严格计算方法应用的结果并探讨进一步提高观测量计算精度的可能性。

第2章 观测量计算方法

本章主要介绍双星观测量计算方法改进的具体内容。

由于原有的双星观测量计算方法所采用的切平面局部参考系无法解决自身的透视与坐标旋转问题，我们不可能通过在原计算方法上添加改正项的方式来修正偏差，而是必须从理论基础出发，按照严格的几何关系计算双星的观测量。

2.1 理论基础

首先，我们考虑的空间是经典的无相对论的三维空间；其次，我们认为双星的运动是经典的二体问题，即每一个子星都可以看成一个没有形状大小的质点，它们除了各自相互作用力之外不受到任何作用力的影响。

二体运动是完全可解的^[14,15]，其满足的二阶微分方程为

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.2)$$

其中 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ， \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 分别为两个质点的位矢， m_1 、 m_2 分别为两个质点的质量， G 为引力常数。(2.1)(2.2) 写成分量形式一共是 6 个二阶微分方程。一般采用的解法是先解出二体质心位置速度

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_0 \quad (2.3)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \dot{\mathbf{R}}_0 t \quad (2.4)$$

其中 $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$ ， \mathbf{R}_0 ， $\dot{\mathbf{R}}_0$ 与 \mathbf{R}_0 为 $t = 0$ 时刻质心的位置和速度，是两个常矢量，其分量是 6 个积分常数。(2.3) 式说明二体质心的速度是恒定的，也就是说，二体质心在空间中做匀速直线运动。

然后微分方程组 (2.1)(2.2) 可以化为

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.5)$$

其中 $\mu = G(m_1 + m_2)$ 。这样就剩下 3 个二阶微分方程待解了。

接下来有

$$\frac{d(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{dt} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad (2.6)$$

则

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} \quad (2.7)$$

其中 \mathbf{h} 是一个常矢量，其分量为三个积分常数。(2.7) 式说明两体的相对运动始

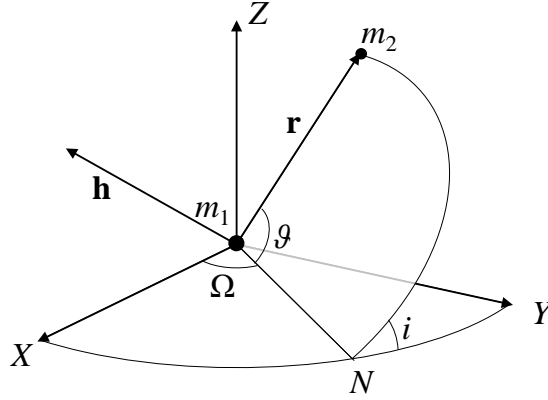


图 2.1 相对运动平面

Figure 2.1 Plane of the relative motion

终在一个平面上，如图2.1所示，这个平面就是 \mathbf{h} 的垂面，它与坐标平面 Xm_1Y 有一条交线 m_1N 。X、Y、Z 的方向与全局坐标系一致，坐标系的原点是主星，坐标系是个非惯性系。 $\overrightarrow{m_1N}$ 的方向为 $\overrightarrow{m_1Z} \times \mathbf{h}$ 的方向。由图2.1可知 \mathbf{h} 的分量可以替换成 $\{\Omega, i, \mathbf{h}\}$ 的形式，其中 Ω 为 N 在 Xm_1Y 平面上的方位角， i 为 \mathbf{h} 与 Z 方向的夹角（同时也是相对运动平面与 Xm_1Y 平面所成的角）。

在相对运动平面中可以用极坐标 r 、 ϑ 来描述二体的运动，其中， ϑ 表示从 N 点起量的方位角。则有

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \quad (2.8)$$

两边对时间求导得

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta \quad (2.9)$$

再次对时间求导，得

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta})\mathbf{e}_\vartheta \quad (2.10)$$

结合 (2.5)、(2.8) 式可知

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad (2.11)$$

$$r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} = 0 \quad (2.12)$$