



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

硕士学位论文

利用弱引力透镜放大率场重构宇宙物质分布

作者姓名： 范里彬

指导教师： 李国亮 研究员

中国科学院紫金山天文台

学位类别： 理学硕士

学科专业： 天体物理

研究所： 中国科学院紫金山天文台

二〇一七年六月

The reconstruction of cosmic matter distribution from
weak lensing magnification

by
Fan Libin

A Thesis Submitted to
University of Chinese Academy of Sciences
in Partial Fulfillment of the Requirement
for the Degree of
Master of Science

Purple Mountain Observatory
Chinese Academy of Sciences

June, 2017

声 明

我声明本论文是我本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，本论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

作者签名：

日期：

论文版权使用授权书

本人授权中国科学院紫金山天文台可以保留并向国家有关部门或机构送交本论文的复印件和电子文档，允许本论文被查阅和借阅，可以将本论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编本论文。

（保密论文在解密后适用本授权书）

作者签名：

导师签名：

日期：

摘 要

弱引力透镜作为现代宇宙学的重要工具，在探测暗物质分布，限制宇宙学参数方面发挥着重要的作用。我们通过高精度的宇宙学N体模拟和弱引力透镜光线追踪模拟来产生星系的模拟观测分布，在模拟的星系数据上利用杨[1][2]和张[3]等人提出的方法来重构宇宙的聚合场功率谱。星系的偏袒因子和放大率因子对星系流量不同的依赖关系，决定了我们可以从像星系的功率谱中分离出宇宙的放大率信号。我们重构得到的聚合场功率谱在小尺度上比理论值偏高了2-3倍，在大尺度上和理论值基本一致。在重构中我们发现，星系自身功率谱中的残余散粒噪声对星系本身的功率谱和聚合场功率谱都会产生偏高的影响，散粒噪声功率谱比聚合场功率谱高出1-2个量级要求我们对散粒噪声的估计必须要精确到 10^{-2} 的量级。在主成分分析中，我们发现特征模的个数会在噪声达到和聚合场相当的水平上对我们的重构产生影响，在小尺度上同样会产生明显的偏高。在重构中我们还发现，放大率的前置因子对我们的重构会产生整体上的偏高或偏低，但是它和对流量的关系形式本身是无关的，只要和星系偏袒因子对流量的依赖关系不同即可。最后，在不同的星系流量样本之间存在着相关联的噪声，这导致了我们的重构的功率谱对理论值的偏高。我们将杨等人的方法应用于模拟数据，是对他们理论研究的补充，也是对他们方法在模拟上的验证，同时对弱引力透镜剪切场也能起到交叉检验的作用。

关键词：宇宙学模拟，大尺度结构，弱引力透镜，宇宙放大率场，聚合场

The reconstruction of cosmic matter distribution from weak lensing magnification

Fan Libin (Astronomy and astrophysics)

Directed by Li Guoliang

Weak gravitational lens, as an important tool of modern cosmology, plays an important role in detecting dark matter distribution and restricting cosmological parameters. We simulate the distribution of galaxies by high-precision cosmological N-body simulation and weak gravitational lens ray-tracing, and reconstruct the power spectrum of the convergence field in the simulated galaxy data using methods from Yang[1][2] and Zhang[3] et al. The dependence of the galaxy's bias factor and the magnification prefactor on the galaxy's flux determines that we can separate the magnification signal of the universe from the power spectrum of the galaxies. The power spectrum of the convergence in our reconstruction is 2-3 times higher than the theoretical value on the small scale, which is basically consistent on the large scale. In the reconstruction, we find that the residual shot noise in the galaxy's power spectrum has a high effect on the power spectrum of convergence and galaxy itself. The shot noise power spectrum is 1-2 times higher than the power spectrum of the convergence requires that we estimate the shot noise must be accurate to the order of 10^{-2} . In the principal component analysis, we find that the number of eigenmodes will have an effect on our reconstruction at a level comparable to that of the convergence field, and will produce a significant high effect on small scales. In the reconstruction, we also found that the prefactor of the magnification field will produce a high or low overall value for our reconstruction, but it is irrelevant to the form of the relationship with the flux, as long as the galaxy bias factor Dependencies is different. Finally, there is an associated noise between different galaxy flux samples, which leads to a higher theoretical value of our reconstructed power spectrum. We apply Yang et al.'s methods to simulated data, supplemented by their theoretical research, verified their method in simulation, and can also play a cross-check for weak gravitational lens shear field.

Keywords: cosmological simulation; large scale structure; weak gravitational lens; cosmic magnification; convergence

目 录

摘 要	I
目 录	V
图目录	VII
第一章 绪论	1
1.1 宇宙学背景	1
1.1.1 宇宙学原理和RW度规	1
1.1.2 宇宙线性演化和Jeans判据	4
1.2 引力透镜	6
1.2.1 引力透镜的发展	7
1.2.2 引力透镜原理	8
第二章 弱引力透镜	13
2.1 暗弱星系像的扭曲	13
2.2 形状和剪切场的测量	15
2.3 宇宙放大率场	17
第三章 宇宙物质分布的重构	21
3.1 聚合场重构理论和方法	21
3.1.1 最小化方差线性估计	22
3.1.2 直接定量计算	23
3.1.3 盲分离分析法	24
3.2 理论模型检验	25
第四章 宇宙学模拟和聚合场功率谱重构	27
4.1 宇宙学模拟	27
4.2 重构聚合场功率谱的结果	32
4.3 其他结果分析	39
第五章 总结	41

参考文献	43
致 谢	i
作者简介	iii

图目录

图 1.1	典型的引力透镜系统中的光线弯曲。	9
图 3.1	星系的本征成团性对弱透镜重构的污染。主要的污染来自于星系的自身功率谱，一般比透镜大几个量级[1]。	25
图 3.2	星系偏袒因子和放大率因子随星系流量 s 的不同变化关系[4]。	26
图 4.1	多平面光线追踪的基本原理[5]。红色表示的光线只有在经过蓝色表示透镜平面时才发生偏转。光线经过距离观测者为 $f_K^{(k-1)}$ 的平面时的偏转角是由 $f_{K,L}^{(k-1)}$ 和 $f_{K,U}^{(k-1)}$ 之间的物质投影到平面上产生的。使用在前一个透镜平面上的偏转角 $\alpha^{(k-1)}$ 和前面两个平面上的角位置 $\beta^{(k-1)}$ 和 $\beta^{(k-2)}$ ，就可以计算在第 k 个平面上产生的偏转角。	28
图 4.2	在红移 $z = 1$ 处通过光线追踪模拟得到的聚合场功率谱和暗晕拟合给出的理论值的比较。	29
图 4.3	用于计算星系的像的位置的插值计算[5]。左边像平面上实心圆点代表的光线将平面分成一系列三角形，然后通过插值法确定源平面上由回溯光线形成的三角形内的源的图像位置。	30
图 4.4	左图是对数坐标下的光度函数，右图是光度函数的斜率和相应的放大率因子随星系流量的变化。	31
图 4.5	像星系和残余散粒噪声的自身和交叉功率谱。图中红色的虚线是两者的差值。	32
图 4.6	从星系的流量子样本中选取的几个自身功率谱和交叉功率谱。对角线上三个为自身功率谱，非对角线上三个为交叉功率谱。	33
图 4.7	在星系功率谱中扣除残余散粒噪声前后的特征值分析。左图是没有扣除残余散粒噪声，右图是扣除了残余散粒噪声。	33
图 4.8	在星系功率谱中扣除残余散粒噪声前后重构的 κ 场功率谱。左图是没有扣除残余散粒噪声，右图是扣除了残余散粒噪声。	34
图 4.9	在只考虑星系一阶偏袒和考虑二阶偏袒情况下重构的聚合场功率谱。	34
图 4.10	在考虑二阶星系偏袒的情况下，分别用方程组和ABS方法重构得到的聚合场功率谱。	35

图 4.11	在星系功率谱中扣除残余散粒噪声后的特征值分析。	36
图 4.12	在星系四个主成分的前提下拟合的残余散粒噪声。	37
图 4.13	在星系功率谱中扣除拟合的残余散粒噪声后的特征值分析。	37
图 4.14	在扣除拟合的残余散粒噪声后重构得到的聚合场功率谱。	38
图 4.15	利用不同的放大率因子 g 重构的聚合场功率谱。	38
图 4.16	在考虑三个主成分基础上拟合残余散粒噪声后星系功率谱的特征值分析。 .	39
图 4.17	扣除用三个主成分拟合的残余散粒噪声以后重构得到的聚合场功率谱。	40

第一章 绪论

现代天文学认为，宇宙是所有时间、空间、物质的总和，是我们这个物质世界的整体，是物理学和天文学的最大研究对象。现代意义上的宇宙学在于探索和解释宇宙的科学方法和理论。宇宙大爆炸是描述宇宙诞生初始条件及其后续演化的宇宙学模型，这一模型得到了当今科学研究和观测最广泛且最精确的支持。宇宙学家通常所指的大爆炸观点为：宇宙是在过去有限的时间之前，由一个密度极大且温度极高的初始状态演变而来的，并经过不断的膨胀到达今天的状态。

1.1 宇宙学背景

在过去的四分之一世纪里，宇宙学的研究变得非常活跃，二十世纪80年代早期提出的暴涨理论，针对某些悬而未决的宇宙学疑难问题给出了解答，并提供了大尺度结构起源的机制，这种机制可以通过对宇宙微波背景辐射各向异性的观测得到验证。二十世纪90年代晚期，利用Ia型超新星作为标准烛光发现了宇宙在加速膨胀，这意味着宇宙中存在的大部分能量是某种暗能量。这一点已经被微波背景辐射的精密观测以及大规模的星系巡天观测结果所证实，另外通过这些观测人们还得到了越来越精确的宇宙学参数。

与此同时，对于这些宇宙学参数，天文学的经典方法给出的独立限制也在不断的改进，而哈勃空间望远镜和地面望远镜的观测结果中给出的哈勃常数值精度也在不断提高。这些方法测量到的宇宙学参数值，与宇宙微波背景以及宇宙大尺度结构的研究所得的结果相一致。

1.1.1 宇宙学原理和RW度规

由观测到的星系在大尺度上的均匀分布和微波背景辐射的各向同性，我们可以知道，宇宙天体的分布是均匀，各向同性的。这实际上是爱因斯坦最早创立现代宇宙学理论时提出的一个假设，现在被称为宇宙学原理：宇宙在大尺度上均匀且各向同性的。因此，我们可以把宇宙看做是密度到处都相同的流体，而星系或星系团就是组成这种流体的质点。这种流体只会各向同性地膨胀或收缩。所以宇宙学原理也可以表述为：宇宙中不同地点，同一时刻看到的宇宙图像是相同的；不同地点看到的宇宙演化图景也是相同的[6]。

这就是说，在宇宙中没有任何一个地点是特殊的，所有的地点都是平等的。爱因斯坦的解释是，我们无法找到被考察区域的空间边界条件，只好用近似的假设来代替边界条件的作用。爱因斯坦的考虑当然是对的，因为我们确实不知道，今天所看到的

宇宙之外是什么。但现在人们更倾向于认为，宇宙学原理不仅仅是一种权宜的无奈选择，而是我们周围均匀各向同性的宇宙向其他未知区域的自然扩展和延伸。

根据宇宙学原理，我们可以容易地得到三维常曲率空间的几何与Robertson-Walker度规。先看二维球面的简单情况：它的面积是 $4\pi r^2$ ，其中 r 为球面半径，因而球面的曲率为 $1/r^2$ 。球面上的一段线元的长度是：

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

现在让我们来想像一个四维空间中的三维球面，从均匀性的观点出发，我们希望是常曲率，所以希望是三维球面，这时时空中的两点距离表达为：

$$ds^2 = f(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

其中 $f(r)$ 表示空间弯曲的程度。 $f(r) = 1$ 相应于平直空间， $f(r) \neq 1$ 表示空间弯曲。如 $r =$ 常数，即 $dr = 0$ ，就回到二维球面，根据Gauss求曲率的公式，三维球面的曲率等于：

$$K = \frac{df(r)}{dr} 2f^2(r)r \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{f(r)} \right) = -2Kr$$

由此解出：

$$\frac{1}{f(r)} = C - Kr^2$$

由于平直空间 $K = 0, f = 1$ ，这给出 $C = 1$ ，故有：

$$f(r) = \frac{1}{1 - Kr^2}$$

现在我们把上述三维球面放到四维时空中。均匀各向同性要求，在同一时刻 t ，宇宙任何地方的时空曲率都应该相同，但曲率可以随时间 t 变化，即可以写为 $K(t)$ ，这样就有：

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - K(t)r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

定义：

$$K(t) = \frac{k}{a^2(t)}, \quad k = \begin{cases} +1 & \text{(正曲率空间或闭合空间)} \\ 0 & \text{(平直空间)} \\ -1 & \text{(负曲率空间或开放空间)} \end{cases}$$

再定义 $\xi \equiv r/a(t)$ (注意 a 具有长度量纲，故 ξ 无量纲)，则：

$$ds^2 = a^2(t) \left[\frac{d\xi^2}{1 - k\xi^2} + \xi^2 + d\theta^2 + \xi^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right]$$

式中 $a(t)$ 称为宇宙尺度因子(或Robertson-Walker尺度因子)，它现在是一个时间的任意函数，可以随时间变化或不变，表示空间整体膨胀、收缩或静止； ξ, θ, φ 构成所谓共动坐

标。注意球面上每一个坐标点的共动坐标是不变的，但其物理坐标 r 是可变的(因为 R 可变)。在每一个坐标点处再放置一只钟记录宇宙时间，并根据宇宙学原理，各处的宇宙时是相同的。对一个静止于共动坐标系的观测者来说，其世界线是 ξ, θ, φ 为常数值线的(即测地线)。这样，时间间隔 $d\tau$ 现在写为(取光速 $c = 1$ ，且习惯上仍把 ξ 写成 r):

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right]$$

注意此时 r 是共动坐标，而物理坐标应为 $a(t)r$ 。如果一个星系位于共动坐标($r = 0, \theta, \varphi$)处，另一个星系位于共动坐标是(r, θ, φ)处，则两者之间的固有(物理)距离是:

$$D = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} a(t) \arcsin r & (k = 1) \\ R(t)r & (k = 0) \\ a(t) \operatorname{arcsinh} r & (k = -1) \end{cases}$$

这两个星系之间的相对固有速度是:

$$v = \frac{dD}{dt} = \dot{a}(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \frac{\dot{a}}{a} \cdot D$$

定义:

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

为哈勃常数，则上式变为:

$$v = H \cdot D$$

这即是我们所熟悉的哈勃定律的一般形式。上面的定义表明，哈勃常数一般情况下是一个随时间变化的量。只有在某个固定的时刻它才是常数，例如取目前时刻 $t = t_0$ ，此时的哈勃常数记为 $H = H_0$ 。

时间间隔 $d\tau$ 用度规的表示形式是:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

这里 $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$; 式中的度规张量 $g_{\mu\nu}$ 称为Robertson-Walker度规(简称RW度规)，在球坐标下，不为零的分量是:

$$g_{00} = -1, \quad g_{rr} = \frac{a^2(t)}{1 - kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = a^2(t)r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2(t)r^2 \sin^2 \theta$$

在广义相对论中已经知道， $g_{\mu\nu}$ 是协变张量，其相应的逆变张量是 $g^{\mu\nu}$ ，这两者之间满足 $g^{\mu\alpha} g_{\mu\beta} = \delta_\beta^\alpha$ ，其中 $\delta_\beta^\alpha = \delta_{\alpha\beta}$ 是Kronecker delta符号，定义为当 $\alpha = \beta$ 时 $\delta_{\alpha\beta} = 1$ ，而当 $\alpha \neq$

β 时 $\delta_{\alpha\beta} = 0$ 。利用这一性质，很容易得出 $g^{\mu\nu}$ 的不为零的分量：

$$g^{00} = -1, \quad g^{rr} = \frac{1 - kr^2}{a^2(t)}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{a^2(t)r^2}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta}$$

此外，利用Robertson-Walker度规，可以得到超球面 r 与 $r + dr$ 之间所包含的固有体积是：

$$\int_{r \rightarrow r+dr} \sqrt{-g} dx^3 = \frac{4\pi r^2 a^3(t) dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

其中 g 为度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的行列式。因而，如果单位固有体积内的星系数，即星系固有数密度为 $n(t)$ ，则此体积内所包含的星系总数为：

$$N(t) = \frac{4\pi r^2 a^3(t) n(t) dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

假定星系总数不随时间变化，即不考虑演化效应，则由 $N(t_0) = N_t$ 得出：

$$a^3(t) n(t) = a^3(t_0) n(t_0)$$

这样就有：

$$n(t) = \frac{a^3(t_0)}{a^3(t)} n(t_0) \Rightarrow n(t) \propto \frac{1}{a^3(t)}$$

这一关系对于所有非相对论性的粒子都是成立的。

1.1.2 宇宙线性演化和Jeans判据

在研究恒星形成的过程中，不是所有的气体星云都可以形成恒星，只有满足一定条件才可以形成，这一条件就是所谓的Jeans判据，这一判据对于星系及更大尺度结构的形成也是成立的。

首先，不考虑宇宙的膨胀。对于温度，密度都不太高的(非相对论性)的气体或流体，设其质量密度为 ρ ，压力为 P ，速度为 \mathbf{v} ，引力势为 Φ ，则有下列经典方程组：

连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

动力学方程：

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi$$

Poisson方程：

$$\nabla^2 \Phi = 2\pi G \rho$$

此外，如果没有黏滞阻力和热传导引起的能量耗散，还应当加上一个熵守恒方程：

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = 0$$

其中 S 代表单位质量物质的熵。这个方程组有静态解:

$$\rho_0 = \text{恒量(质量分布均匀)}, P_0 = \text{恒量(压力分布均匀)}, \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}(\text{整体静止})$$

$$S_0 = \text{恒量(熵分布均匀)}, \Phi_0 = \text{恒量(引力场均匀)}$$

这相当于无扰动的整体平衡状态。但是,这一平衡是不稳定的。物质密度分布中总会至少有一点不均匀性。这一点不均匀性所产生的引力,就会产生持续的连锁效应,使原来的整体静态平衡被打破。

在小扰动的情況下,上述各量可写为:

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, P = p_0 + p, \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}$$

$$\Phi = \Phi_0 + \phi, S = S_0 + s$$

带入前面的方程组,并消去零级项,可以得到:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_0\nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \nabla\delta\rho + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \nabla s + \nabla\phi = 0$$

$$\nabla^2\phi - 4\pi G\delta\rho = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

这个方程组有平面波解:

$$D_j = \Delta_j \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$$

其中 $D_j(j = 1, 2, 3, 4)$ 分别表示 $\delta\rho, \delta\mathbf{v}, \phi$ 和 s ; $\Delta_j(j = 1, 2, 3, 4)$ 表示它们相应的振幅。把这式带入上面的方程组,得到:

$$-\omega\Delta_1 + \rho_0\mathbf{k} \cdot \Delta_2 = 0$$

$$-\omega\Delta_2 + \mathbf{k} \frac{\Delta_1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s + \frac{\mathbf{k}}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \Delta_4 + \mathbf{k}\Delta_3 = 0$$

$$\mathbf{k}^2\Delta_3 + 4\pi G\Delta_1 = 0$$

$$\omega\Delta_4 = 0$$

对于随时间变化的扰动， $\omega \neq 0$ ，于是上面第四个等式表明必须有 $\Delta_4 = 0$ 。显然这是熵不变条件所要求的，满足这一条件的扰动称为绝热扰动。考虑到绝热条件，并令 $v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ ，其中 v_s 代表绝热声速，则上面一到三式可化为：

$$-\omega\Delta_1 + \rho_0\mathbf{k} \cdot \Delta_2 = 0$$

$$k v_s^2 \Delta_1 - \rho_0 \omega \Delta_2 + \rho_0 \mathbf{k} \Delta_3 = 0$$

$$4\pi G \Delta_1 + k^2 \Delta_3 = 0$$

这个方程组对于 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 具有非零解的条件是：

$$\begin{vmatrix} -\omega & \rho_0 \mathbf{k} & 0 \\ k v_s^2 & -\omega \rho_0 & k \rho_0 \\ 4\pi G & 0 & k^2 \end{vmatrix} = 0$$

这就给出 ω 和 \mathbf{k} 应满足的色散条件：

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 - 4\pi G \rho_0$$

如果波数 k 小于临界值：

$$k < k_J = \left(\frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

则 ω 是虚数， $\delta\rho$ 就会按指数增长(或衰减)。临界波数 k_J 相应的波长：

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi}{k_J} = v_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}$$

称为Jeans波长，而以 λ_J 为直径的球体体积内所包含的质量 M_J 称为Jeans质量：

$$M_J = \frac{\pi}{6} \rho_0 \lambda_J^3 = \frac{\pi}{6} v_s^3 \sqrt{\frac{\pi^3}{G^3 \rho_0}}$$

显然，当气体的质量 $M > M_J$ 时，就会出现引力不稳定性，气体云由于这种不稳定性将收缩。这个结论称为Jeans判据。

1.2 引力透镜

引力透镜是指光线在经过星系团或大质量天体时会在其引力的作用下发生偏折的一种现象。在十八世纪初，牛顿就已经根据观测提出了引力透镜的现象，到了二十世纪爱因斯坦的广义相对论才真正的奠定了引力透镜的理论基础。牛顿的引力理论能在将光线当成粒子束的基础上计算引力作用下光线的偏折角，而爱因斯坦的广义相对论

给出的结果却是牛顿得到的偏转角的两倍，这在1919年爱丁顿测量太阳的引力场对光线的偏折后确认了广义相对论的正确性，也奠定了广义相对论在宇宙学中的重要地位，从此被广泛接受。

1.2.1 引力透镜的发展

引力透镜造成的光线偏转通常对源星系会有两个方面的影响，星系形状的改变和流量的变化，我们在观测中看到的巨弧和某些恒星光度突然变亮就是由引力透镜引起的。引力透镜按强度大小可以分为三类，强透镜，弱透镜和微透镜，如果距离我们足够远，质量足够大的天体对光线引起的偏折比较强，甚至我们可以看到这个源星系的几个像，那么我们称之为强透镜。如果强度比较弱，亦或是大尺度上的物质分布对光线的微小的偏转，而我们并不能看到星系的多像，只能观测到星系的形状发生了微小的改变，我们称之为弱透镜。如果引力光线偏折的中心天体只是星系中大质量的恒星，对光线的偏折也极其弱小，这种现象就是微透镜。强透镜因为对像的改变非常明显，最著名的就是爱因斯坦环和星系团中的巨弧，我们可以用单个的现象去研究其规律。弱透镜通常是在大尺度上光线偏折对大量星系引起的形状和流量的有一定规律的改变，统计研究就成了弱透镜研究的最主要的方法。微透镜的概念在二十世纪60年代才被提出，因为不像强弱引力透镜，微透镜的中央天体质量很小，光的偏转要小得多，通常情况下难以直接观测到微引力透镜所成的像，而只能观察到光度在瞬间增强的现象，而直到1993年，才在大麦哲伦云中发现了第一个微引力透镜[7]。

在过去的几十年中，引力透镜已经成为了研究宇宙中物质分布的一个非常有力的工具，小到单个的星系，大到超大质量的星系团及宇宙的大尺度结构，引力透镜都发挥了巨大的作用。引力透镜的剪切场能够用来限制宇宙学参数，探测宇宙中暗物质的分布[8]。现在，通过功率谱，两点相关函数等统计性质，我们对大尺度的物质分布和演化都能够做到非常高的精度，通过这些统计性质，我们同样也可以去预测引力透镜的现象，就像我们去理解大尺度结构的形成一样。而且在不久的将来，我们不仅可以通过高精度的观测去测量引力透镜，而且随着计算机技术的发展，高精度的计算机模拟不仅有助于我们了解宇宙大尺度的形成，甚至还能通过光线追踪来重现引力透镜的过程，这不仅可以弥补我们观测上的信息缺失，而且通过星系-星系透镜的观测还能对星系形成的半解析模型做出非常好的限制作用，进而可以从观测上去证实模型的准确性[9][10]。

现在对于引力透镜的研究主要集中在对模型的构建和观测的验证上[11][12]。对于强透镜，现在的研究主要分为三部分，一是研究透镜体的性质，包括透镜体的质量和分布，尤其是对透镜体中暗物质的探测更是这些年的热点[13]，二是研究源的性质，借助引力透镜的放大作用，可以更清晰的研究非常遥远的暗弱的天体，三是研究空间几何性质和宇宙学常数，通过不同像之间的时间延迟来探测哈勃常数[14]。而对于弱

透镜来说，超深空巡天观测和高精度计算机模拟的结合保证了我们能够从统计上对弱引力透镜的性质进行研究与证实。现在对于弱透镜的测量最困难也是最成功的方法就是宇宙的剪切场，自从2000年第一次被探测到以后，就涌现出了一大批星系巡天，如已完成的CFHTLenS, 正在进行的DES, KiDS, HSC, 和未来的LSST, WFIRST, Euclid等，他们为将来弱透镜的研究和应用提供了充足的保障[15][16][17]。但是对于宇宙剪切场的测量却还是受限于星系形状的精确测量和星系内禀指向性的影响。而这也是弱透镜剪切场现在以及将来需要去解决的重大问题。对于弱透镜另一个效应，星系的放大率场[18][19][20]，虽然现在在理论上的研究已经显示出了其巨大的价值，甚至可以和宇宙剪切场相媲美，在[8]中张就已经证明可以通过宇宙的放大率场来重构宇宙的物质分布，放大率场相对剪切场来说最大的优点就是不受星系形状的影响，因此可以避免有关星系形状的所有问题。虽然放大率场也会受到和宇宙大尺度有关的星系本征成团性的影响，但是只要高红移下足够亮足够多的样本就能够减少星系本征成团性和星系偏袒的影响。虽然到目前为止对于放大率场的理论已经很多[21][22]，但是对于放大率场在模拟甚至观测的应用却还没有大量的展开，而这也是放大率场现在急需和将来必须要做的事情。这篇文章和所做的工作就是对于将放大率场应用于模拟数据的一个尝试。

1.2.2 引力透镜原理

在广义相对论中，光线是沿着时空几何的测地线传播的。在引力透镜中，我们可以用一种更简单的近似来描述光线的传播，在这一小节中，我们会简单介绍引力透镜的基本原理[23]。

我们从最简单的引力透镜的情形开始，假设质量层在红移 z_d 处（或者距离 D_d ），这个质量层偏转了从红移为 z_s （或者距离 D_s ）处源发射过来的光线，如果在视线方向上没有其他的偏转，而且沿着视线方向的质量层的偏转程度相对于从观测者到质量层和到源的距离非常小时，真实光线非常平滑的弯曲就可以近似用两条直的光线在质量层处偏转来代替。这两条直线之间的夹角的方向和大小就是偏转角 $\hat{\alpha}$ ，这个角的大小取决于质量层质量的分布和光线的偏转因子。透镜方程就是联系了天空中源的位置到观测者的位置。正如在图 1.1中表现的那样，源平面和透镜平面都是被定义为垂直于从观测者到透镜的光线的平面，具体的光轴的定义不是很重要，是因为在典型的光学系统中偏转角都是非常小的。我们用 $\boldsymbol{\eta}$ 来表示源平面上源的二维位置，是根据源平面上光轴点的位置来确定的。从图中我们看出他们之间的几何关系(考虑到偏转角很小，因此 $\sin \hat{\alpha} \approx \hat{\alpha} \approx \tan \hat{\alpha}$):

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{D_s}{D_d} \boldsymbol{\xi} - D_{ds} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi})$$

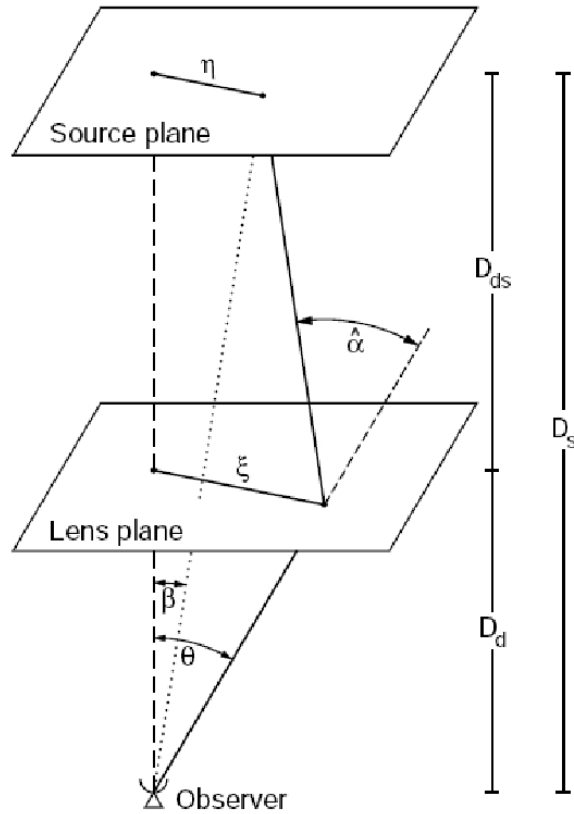


图 1.1 典型的引力透镜系统中的光线弯曲。

在广义相对论的预言中，偏转角：

$$\hat{\alpha}(\xi) = \frac{4GM}{c^2\xi}$$

通过下面两个等式引入角坐标：

$$\eta = D_s\beta$$

和

$$\xi = D_d\theta$$

这样我们就能把上面的方程写为：

$$\beta = \theta - \frac{D_{ds}}{D_s}\hat{\alpha}(D_d\theta) \equiv \theta - \alpha(\theta)$$

这儿在最后一步定义了一个缩放偏转角 $\alpha(\theta)$ 。上面方程的中间部分说明了观测者能够看到在 β 处源的像实际的角坐标位置是 θ 。如果上面的方程对于 β 有不止一个解，那么说明在 β 位置处的源有不止一个像，此时透镜就会产生多像系统。当这种情况发生的时候，

透镜就是强透镜。可以根据面质量密度来写出这样一个尺度上的偏转角的表达式：

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{IR^2} d^2\theta' \kappa(\theta') \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2}$$

这儿也定义了一个无量纲的面质量密度，或者称为聚合场：

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) := \frac{\Sigma(D_d \boldsymbol{\theta})}{\Sigma_{cr}}$$

其中

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}}$$

这里的临界面质量密度 Σ_{cr} 取决于观测者到源的距离 D_s ，观测者到透镜的距离 D_d 和源到透镜的距离 D_{ds} 。这在以后会讨论到，一个质量的分布如果在某个地方 $\kappa \geq 1$ ，即 $\Sigma \geq \Sigma_{cr}$ ，那么在某些位置上的源就会产生多像。因此， Σ_{cr} 对于面质量密度来说是一个特征值，这个值决定了透镜是弱透镜还是强透镜。

上面的透镜方程描述了从透镜平面的 $\boldsymbol{\theta}$ 角到源平面的 $\boldsymbol{\beta}$ 角的转换，通过任意的质量分布 $\Sigma(\boldsymbol{\xi})$ ，可以很容易地计算得到这个图像。引力透镜理论的一个问题就是透镜的逆方程。例如，为了找到在位置 $\boldsymbol{\beta}$ 处给定源的像的位置 $\boldsymbol{\theta}$ 。既然从 $\boldsymbol{\theta}$ 到 $\boldsymbol{\beta}$ 的关系是非线性的，透镜方程的逆方程在理论上只有非常简单的质量模型才能有解析解。而且对于一个给定源 $\boldsymbol{\beta}$ 的像的位置 $\boldsymbol{\theta}$ 的个数是未知的，通常情况下数值的逆变化是无法直接得到的。然后，从下面可以看到，仍然有一些方法能够从源的位置去决定多像的位置。

定义 $\nabla \ln |\boldsymbol{\theta}| = \boldsymbol{\theta}/|\boldsymbol{\theta}|^2$ ，这对任何的二维矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 都是有效的，这证明了偏转角可以写为偏转势的梯度：

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{IR^2} d^2\theta' \kappa(\theta') \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|$$

因为：

$$\boldsymbol{\alpha} = \nabla \psi$$

所以从 $\boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\beta}$ 的映射就是梯度场。而且，使用定义 $\nabla^2 \ln |\boldsymbol{\theta}| = 2\pi \delta_D(\boldsymbol{\theta})$ ，这儿的 δ_D 是一个二维的狄拉克函数，从上面的方程可以得到：

$$\nabla^2 \psi = 2\kappa$$

这就是二维的泊松方程。需要注意到在这些透镜关系和标准的三维引力势之间都有这样的关系。

进一步，可以发现可以定义一个标量函数：

$$\tau(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta})^2 - \psi(\boldsymbol{\theta})$$